Оглавление

[Введение 2](#_Toc200152867)

[1. Реализация методов дискретного логарифмирования 6](#_Toc200152868)

[2. Вспомогательные математические функции 8](#_Toc200152869)

[3. Алгоритм Шенкса 12](#_Toc200152870)

[4. Алгоритм Полига-Хеллмана 19](#_Toc200152871)

[5. Алгоритм ро-метод Полларда 26](#_Toc200152872)

[6. Алгоритм Адлемана 36](#_Toc200152873)

[7. Алгоритм COS 43](#_Toc200152874)

[8. Алгоритм решето числового поля 50](#_Toc200152875)

[Заключение 62](#_Toc200152876)

[Список литературы 66](#_Toc200152877)

[Приложения 67](#_Toc200152878)

[Приложение 1. Модифицированный алгоритм Шенкса 67](#_Toc200152879)

[Приложение 2. Модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана 70](#_Toc200152880)

[Приложение 3. Модифицированный алгоритм ро-метод Полларда 74](#_Toc200152881)

[Приложение 4. Модифицированный алгоритм Адлемана 75](#_Toc200152882)

[Приложение 5. Модифицированный алгоритм COS 86](#_Toc200152883)

[Приложение 6. Модифицированный алгоритм решето числового поля 98](#_Toc200152884)

# Введение

Дискретное логарифмирование является задачей обращения функции в некоторой конечной мультипликативной группе .

Задача дискретного логарифмирования наиболее часто рассматривается над конечным полем в группе точек эллиптической кривой и в мультипликативной группе конечного поля или кольца вычетов. На данный момент не существует эффективных алгоритмов для решения задач дискретного логарифмирования.

Дискретным логарифмом элемента по основанию называется решение уравнения . Индекс числа по основанию называется решением, когда является мультипликативной группой кольца вычетов по модулю . Если является первообразным корнем по модулю , то обязательно существует индекс числа по основанию .

Пусть в некоторой конечной мультипликативной абелевой группе задано уравнение . Нахождение некоторого неотрицательного числа , удовлетворяющего данному уравнению, является решением задачи дискретного логарифмирования. Если существует решение, то у уравнения должно быть хотя бы одно натуральное решение, не превышающее порядок группы. Таким образом данное условие даёт жесткую оценку сложности алгоритма поиска решений сверху. Решение перебором нашло бы результат за число шагов не выше порядка данной группы.

Наиболее рассматриваемым случаем является , когда группа является циклической, порождённой элементом . В данном случае уравнение всегда имеет решение. Существование решения задачи дискретного логарифмирования, а именно уравнения , требует отдельного рассмотрения, если группа произвольная.

Для примера дана задача дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа . Будет проведено решение задачи методом перебора. Вычисляя все степени числа 3 по модулю 17, получаются следующие значения: . Решением данного уравнения является , так как . В прикладных задачах модуль берётся большим числом, поэтому метод перебора является неэффективным и достаточно медленным, таким образом возникает потребность в более эффективных и быстрых алгоритмах.

Существует множество алгоритмов, которые разделяются на экспоненциальные и субэкспоненциальные алгоритмы, для решения задачи дискретного логарифмирования. На данный момент полиномиального алгоритма для решения данной задачи не существует.

Алгоритмы с экспоненциальной сложностью:

1) алгоритм Шенкса (алгоритм больших и малых шагов);

2) алгоритм Полига - Хеллмана работает, когда имеется разложение числа . на простые множители. Сложность: . Алгоритм очень эффективен, когда множители, на которые раскладывается достаточно маленькие;

3) ро-Метод Полларда имеет эвристическую оценку сложности .

Алгоритмы с субэкспоненциальной сложностью:

В L-нотации вычислительная сложность данных алгоритмов оценивается как арифметических операций, где и - некоторые константы. От близости величин и к 1 и 0 зависит эффективность алгоритма.

1) алгоритм Алемана, появившийся в 1979 году, был первым субэкспоненциальным алгоритмом дискретного логарифмирования и на практике был недостаточно эффективным. В данном алгоритме .

2) алгоритм COS был изобретён математиками Копперсмитом, Одлыжко и Шреппелем в 1986 году. В данном алгоритме . Данным алгоритмом было проведено логарифмирование по модулю в 1991 году. В 1997 году Вебер при использовании модифицированной версии алгоритма смог провести дискретное логарифмирование по модулю . Эксперименты показали, что алгоритм COS продемонстрировал лучше результаты, чем решето числового поля при .

3) дискретное логарифмирование с использованием решета числового поля было применено к дискретному логарифмированию позже, чем к факторизации чисел. Первые идеи появились в 1990-х годах. Модификация алгоритма Д. Гордона, предложенная в 1993 году, имела эвристическую сложность , но оказалась достаточно непрактичной. Позднее появились множество других улучшений данного алгоритма. Экспериментально было показано, что при решето числового поля быстрее, чем алгоритм COS. Данным алгоритмом получены современные рекорды дискретного логарифмирования.

Параметры являются наилучшими в оценке сложности на данный момент.

Есть возможность улучшить результат для чисел специального вида. Можно построить алгоритм, для которого константы будут . Данные алгоритмы могут обогнать алгоритм с , потому что константа достаточно близка к 1.

Актуальность выпускной работы заключается в том, что задача дискретного логарифмирования является одной из основных задач, на которых базируется криптография с открытым ключом. Классическими криптографическими схемами на её основе являются схема выработки общего ключа Диффи-Хеллмана, схема электронной подписи Эль-Гамаля, криптосистема Мэсси-Омуры для передачи сообщений. За счёт высокой вычислительной сложности обращения показательной функции проявляется их криптостойкость. Хотя сама показательная функция вычисляется достаточно эффективно, даже самые современные алгоритмы вычисления дискретного логарифма имеют очень высокую сложность, которая сравнима со сложностью наиболее быстрых алгоритмов разложения чисел на множители.

Другая возможность эффективного решения задачи вычисления дискретного логарифма связана с квантовыми вычислениями. Теоретически доказано, что с помощью алгоритма Шора дискретный логарифм можно вычислить за полиномиальное время. В любом случае, если полиномиальный алгоритм вычисления дискретного логарифма будет реализован, это будет означать практическую непригодность криптосистем на его основе для долговременной защиты данных. Рассматривается ряд идей для создания новых алгоритмов с открытым ключом.

Целью выпускной работы является исследование и реализация алгоритмов дискретного логарифмирования с экспоненциальной и субэкспоненциальной сложностью. Также исследование и реализация модифицированных алгоритмов на основе разработанных базовых алгоритмов дискретного логарифмирования, проведение экспериментов и сравнение базовых и модифицированных алгоритмов.

Задачами выпускной работы являются:

1) реализовать вспомогательные математические функции для проверки алгоритмов дискретного логарифмирования,

2) исследовать и реализовать базовые алгоритмы дискретного логарифмирования,

3) исследовать и реализовать модифицированные алгоритмы дискретного логарифмирования,

4) провести эксперименты и сравнительный анализ на реализованных базовых и модифицированных методах дискретного логарифмирования.

# 1. Реализация методов дискретного логарифмирования

В процессе выпускной работы были изучены и реализованы базовые и модифицированные методы дискретного логарифмирования на языке программирования C# на .NET8 в Windows Forms (рисунок 1). Для работы с большими рациональными числами и полиномами использовалась библиотека ExtendedArithmetic. Для тестирования данных алгоритмов был реализован генератор параметров Диффи-Хеллмана и возведение числа в степень по модулю. Также для тестирования данных алгоритмов был использован замер времени выполнения алгоритма и количество затраченной памяти на выполнение алгоритма.



Рисунок 1 - Реализованная программа

Были реализованы экспоненциальные алгоритмы дискретного логарифмирования: алгоритм Шенкса, алгоритм Полига-Хеллмана, ро-метод Полларда, а также субэкспоненциальные алгоритмы дискретного логарифмирования: алгоритм Адлемана, алгоритм COS, решето числового поля. Для разработки всех алгоритмов были реализованы вспомогательные математические функции.

Разработанная программа позволяет вносить в текстовые поля необходимые значения параметров возведения чисел в степень по модулю: g, a, p, A, либо целых чисел N для разложения на простые множители и выводить результат вычисления. Для корректности работы программы была реализована проверка на корректность ввода параметров для вычисления результатов алгоритмов. При помощи встроенного метода TryParse() в платформе для разработки программного обеспечения .NET идёт попытка конвертировать введённые значения в BigInteger. Если конвертация проходит успешно, то идёт проверка отрицательность конвертированных значений. Если проверка введённых значений проходит успешно, то идёт вычисление алгоритма (рисунок 2).



Рисунок 2 - Вычисление модифицированных алгоритмов

# 2. Вспомогательные математические функции

Для реализации алгоритмов дискретного логарифмирования были реализованы вспомогательные математические функции.

Была реализована функция быстрого возведения в степень по модулю. Возведение в степень по модулю является операцией над натуральными числами, которые выполняются по модулю. Данная операция применяется в информатике, в частности в криптографии с открытым ключом.

Возведение в степень по модулю – это вычисление остатка от деления натурального числа (основание), возведённого в степень (показатель степени), на натуральное число (модуль), обозначаемое .

Если выполняется условие, что , и неотрицательны и , тогда существует единственное решение , причём . В случае, если показатель степени отрицательное, то возведение в степень по модулю также может быть выполнено. В таком случае требуется найти число , обратное числу по модулю , что выполняется при использовании алгоритма Евклида. От сюда следует, что .

При больших входных значениях возведение в степень по модулю достаточно эффективно, но более трудозатратным является вычисление дискретного логарифма, то есть нахождение показателя степени при входных параметрах , и . Данное одностороннее поведение функции даёт возможность применять функцию в криптографических алгоритмах [1, 2].

Шаги алгоритма быстрого возведения в степень по модулю:

1) показатель степени переводится в двоичный вид;

2) создаётся список для чисел, первый элементом которого является ;

3) в созданный список циклично добавляются остатки от деления квадратов последних элементов на ;

4) все элементы списка, индексы которых совпадают с позициями 1 в двоичном числе из первого пункта, перемножаются;

5) вычисляется остаток от деления перемноженных чисел списка на .

Для проверки работы разработанного алгоритма были сгенерированы параметры Диффи-Хеллмана: . В результате работы алгоритма был корректно вычислен результат (рисунок 3).

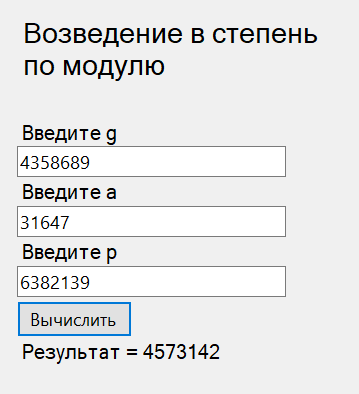


Рисунок 3 - Результат возведения в степень по модулю

Для проверки чисел на простоту был реализован тест Миллера-Рабина. Данный тест является вероятностным полиномиальным тестом простоты. Данный тест применяется для того, чтобы эффективно определить, является ли входное число составным. Для решения данной проблемы применяются в том числе тест Ферма и тест Соловея-Штрассена. Недостатком теста Миллера-Рабина является невозможность строгого доказательства простоты числа. Однако данный тест широко применяется в области криптографии для вычисления больших случайных простых чисел.

Для создания секретных ключей, на которых основывается криптостойкость многих алгоритмов шифрования, необходимы простые числа. По данной причине для генерации ключей необходимо иметь возможность проверять большие числа на простоту достаточно быстро. Вероятностные тесты демонстрируют большую простоту выражения и эффективность использования по сравнению с детерминированными тестами, например, тест Миллера-Рабина и тест Соловея-Штрассена. Тест Миллера-Рабина даёт достаточно малую вероятность того, что число является составным при проверке за малое время.

Тест Миллера-Рабина основывается на проверке ряда равенств, выполняемой для простых чисел. При условии, что хотя бы одно равенство не выполняется, тест докажет, что число составное.

Для теста Миллера-Рабина применяется следующее утверждение. Пусть – простое число и , где – нечётно. Тогда для любого из выполняется хотя бы одно из условий:

1) ;

2) существует целое число такое, что .

Если одно из данных условий выполняется для некоторых чисел и (не обязательно простого), то число называют вероятно простым, а число – свидетелем простоты числа по Миллеру. Вероятность ошибочно принять составное число за простое составляет 25% при случайно выбранном , однако выполнив проверки для других вероятность ошибки можно уменьшить.

При условии, что выполняется контрапозиция доказанного утверждения, то есть если найдётся число такое, что:

1) ,

2) ,

тогда число не является простым, а число называется свидетелем того, что число является составным.

Согласно теореме Рабина, нечётные составные числа имеют не более свидетелей простоты, где — функция Эйлера, то есть вероятность того, что случайно выбранное число окажется свидетелем простоты, меньше 0,25. Суть теста состоит в том, чтобы проверить являются ли случайно выбранные числа свидетелями простоты числа , при условии, что . Число в результате является составным, если имеется свидетель того, что число составное. Таким образом, число считается простым, если было проверено чисел, все из которых оказались свидетелями простоты. Вероятность принятия составного числа за простое является меньше для данного алгоритма.

По причине того, что распределение свидетелей простоты и составного числа среди чисел заранее неизвестно, необходимо выбирать числа случайными для проверки больших чисел.

Для алгоритма Миллера-Рабина, параметризуемого количеством раундов , рекомендуется брать порядка величины , где - проверяемое число.

Для данного вычисляется такое целое число и целое нечётное число , что выполняется . Генерируется случайное число такое, что . В случае, если число не является свидетелем простоты числа , генерируется ответ, что « — составное», далее алгоритм завершается. Иначе, генерируется новое случайное число и проверка повторяется. После вычисления свидетелей простоты, имеется результат, что « — вероятно простое», после чего алгоритм завершается [3, 4].

Для генерации параметров Диффи-Хеллмана генерируется случайно показатель степени определённой битности. Также определённой битности генерируются параметры и . Далее идёт проверка, что параметр является первообразным корнем по модулю . Если выполняются условия, что:

1) число взаимно простое с числом ,

2) выполняется равенство ,

3) выполняется равенство для всех , где является простым делителем числа , полученный при помощи факторизации ро-методом Полларда,

тогда параметр является первообразным корнем по модулю , иначе генерируются другие параметры и . После успешной генерации параметров , и вычисляется решение по формуле .

# 3. Алгоритм Шенкса

Были реализованы алгоритмы и проведены тесты базового и модифицированного алгоритма «Шаг младенца – шаг великана». Алгоритм Гельфонда-Шенкса - в теории групп детерминированный алгоритм дискретного логарифмирования в мультипликативной группе кольца вычетов по модулю простого числа. Данный алгоритм также называется алгоритмом согласования и алгоритмом больших и малых шагов. Начальный вид алгоритма был разработан советским математиком Александром Гельфондом в 1962 году и Дэниелом Шенксом в 1972 году. Данный алгоритм в теории упрощает решение задач дискретного логарифмирования, на вычислительной сложности которого построены многие криптосистемы с открытым ключом, и относится к методам встречи посередине.

Данный метод был одним из первых алгоритмов, продемонстрировавших, что вычисление дискретного логарифма может выполняться быстрее, чем методом перебора. Суть метода заключается в усовершенствованном поиске показателя степени, то есть выбирается оптимальное соотношение времени и памяти.

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Начальный алгоритм реализован следующим образом:

1) сначала берутся два целых числа и , такие, что . Как правило ;

2) вычисляются два ряда чисел:

,

.

Все вычисления проводятся по модулю ;

3) идёт поиск таких и , для которых выполняется равенство . То есть ищется во втором ряду такое число, которое присутствует и в первом ряду. Запоминаются показатели степени и , при которых данные числа получались;

4) в результате работы алгоритма неизвестная степень вычисляется по формуле [5].

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в распараллеливании 2 и 3 шага алгоритма. На 2 шаге алгоритма параллельно асинхронно вычисляются два ряда чисел. Функция 2 шага заканчивает работу, когда оба ряда чисел полностью вычислены. Теоретическая оценка сложности 2 шага базового алгоритма , а модифицированного . На 3 шаге начинают вычисляться параллельно 2 функции, одна из которых начинает поиск результата с начала ряда, а другая с конца ряда. Функция 3 шага прекращает работу, когда одна из функций находит результат вычисления. Теоретическая оценка сложности 3 шага базового алгоритма , а модифицированного .

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 1) и модифицированного (таблица 2) алгоритма Шенкса, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 1- Результаты тестов базового алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 9347 | 99 | 14629 | 6331 | 4 | 278312 |
| 11873 | 107 | 14401 | 2419 | 1 | 270368 |
| 11922 | 78 | 26399 | 22034 | 1 | 417888 |
| 606 | 75 | 4973 | 3597 | 2 | 139664 |
| 8173 | 49 | 14143 | 8610 | 1 | 263168 |
| 32464 | 14 | 32717 | 20677 | 1 | 263168 |
| 6229 | 118 | 32257 | 5301 | 2 | 444096 |
| 7921 | 106 | 16703 | 100 | 2 | 296064 |
| 16108 | 101 | 31271 | 6732 | 7 | 5862760 |
| 5901 | 85 | 7019 | 3639 | 2 | 164480 |

Таблица 2 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 9347 | 99 | 14629 | 6331 | 47 | 278592 |
| 11873 | 107 | 14401 | 2419 | 27 | 270368 |
| 11922 | 78 | 26399 | 22034 | 23 | 409408 |
| 606 | 75 | 4973 | 3597 | 24 | 139808 |
| 8173 | 49 | 14143 | 8610 | 23 | 271392 |
| 32464 | 14 | 32717 | 20677 | 35 | 466992 |
| 6229 | 118 | 32257 | 5301 | 34 | 452320 |
| 7921 | 106 | 16703 | 100 | 21 | 296064 |
| 16108 | 101 | 31271 | 6732 | 30 | 452320 |
| 5901 | 85 | 7019 | 3639 | 32 | 172704 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Шенкса равно 2.3 мс, а модифицированного алгоритма Шенкса равно 29.6 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Шенкса равна 839996.8 байт, а модифицированного алгоритма Шенкса равна 320996.8 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения, а модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 3) и модифицированного (таблица 4) алгоритма Шенкса, где , и – 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 3- Результаты тестов базового алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 72142839 | 45 | 401699497 | 180776367 | 179450 | 4586080 |
| 216592957 | 67 | 1535278343 | 983613871 | 1416246 | 8018992 |
| 1063850105 | 28 | 1752424721 | 1133518573 | 2049247 | 10349832 |
| 641832856 | 114 | 1912453999 | 1707478458 | 1334235 | 9234184 |
| 153341898 | 17 | 378285451 | 184658749 | 356234 | 6531234 |
| 440270945 | 86 | 547132867 | 127053943 | 1734623 | 7652345 |
| 28181579 | 96 | 1691891543 | 1482106649 | 2195341 | 6534923 |
| 572050022 | 37 | 1405842083 | 45578011 | 1827374 | 8634152 |
| 1769314487 | 117 | 1978813019 | 1603737570 | 1475357 | 5734645 |
| 608493163 | 53 | 667849967 | 614352815 | 2341533 | 10294564 |

Таблица 4 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 72142839 | 45 | 401699497 | 180776367 | 175768 | 1709904 |
| 216592957 | 67 | 1535278343 | 983613871 | 1387387 | 7734960 |
| 1063850105 | 28 | 1752424721 | 1133518573 | 2046500 | 4854392 |
| 641832856 | 114 | 1912453999 | 1707478458 | 1134235 | 9134184 |
| 153341898 | 17 | 378285451 | 184658749 | 336234 | 6231234 |
| 440270945 | 86 | 547132867 | 127053943 | 1434623 | 7152345 |
| 28181579 | 96 | 1691891543 | 1482106649 | 2095341 | 6134923 |
| 572050022 | 37 | 1405842083 | 45578011 | 1427374 | 8234152 |
| 1769314487 | 117 | 1978813019 | 1603737570 | 1275357 | 5234645 |
| 608493163 | 53 | 667849967 | 614352815 | 2141533 | 10094564 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Шенкса равно 1490964 мс, а модифицированного алгоритма Шенкса равно 1345435.2 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Шенкса равна 7757095.1 байт, а модифицированного алгоритма Шенкса равна 6651530.3 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 5) и модифицированного (таблица 6) алгоритма Шенкса, где , и – 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 5- Результаты тестов базового алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 734022286 | 2260 | 888333059 | 207727322 | 851317 | 2438016 |
| 519908789 | 27422 | 1176863351 | 1004437759 | 1032538 | 5691992 |
| 1190622764 | 23591 | 1582719121 | 421276480 | 1775280 | 7058624 |
| 43944272 | 7622 | 113830279 | 97331062 | 1204953 | 4562345 |
| 11153680 | 31859 | 1827918509 | 1658501642 | 1352342 | 4567234 |
| 167298629 | 19434 | 289159777 | 20563900 | 1652352 | 5237524 |
| 83421829 | 2311 | 1620676819 | 1044052987 | 1586493 | 6956284 |
| 1506890940 | 15782 | 1556831663 | 467681122 | 1826592 | 5927483 |
| 463547350 | 2937 | 1648004693 | 633238154 | 1284859 | 6375812 |
| 56985777 | 14752 | 60477983 | 13103552 | 1683934 | 6839491 |

Таблица 6 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 734022286 | 2260 | 888333059 | 207727322 | 848845 | 3354080 |
| 519908789 | 27422 | 1176863351 | 1004437759 | 1035389 | 211480 |
| 1190622764 | 23591 | 1582719121 | 421276480 | 1742844 | 983696 |
| 43944272 | 7622 | 113830279 | 97331062 | 1104953 | 4262345 |
| 11153680 | 31859 | 1827918509 | 1658501642 | 1152342 | 4267234 |
| 167298629 | 19434 | 289159777 | 20563900 | 1252352 | 5037524 |
| 83421829 | 2311 | 1620676819 | 1044052987 | 1286493 | 6556284 |
| 1506890940 | 15782 | 1556831663 | 467681122 | 1526592 | 5527483 |
| 463547350 | 2937 | 1648004693 | 633238154 | 1084859 | 6075812 |
| 56985777 | 14752 | 60477983 | 13103552 | 1483934 | 6439491 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Шенкса равно 1425066 мс, а модифицированного алгоритма Шенкса равно 1251860.3 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Шенкса равна 5565480.5 байт, а модифицированного алгоритма Шенкса равна 4271542.9 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и затраченной памяти.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма Шенкса можно сделать вывод, что базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченном времени выполнения на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Шенкса. Также базовый и модифицированный алгоритм Шенкса показал лучше результаты, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число (рисунок 4, 5).

Рисунок 4 - Среднее затраченное время алгоритма Шенкса

Рисунок 5 - Средняя затраченная память алгоритма Шенкса

# 4. Алгоритм Полига-Хеллмана

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана. Данный алгоритм представляет собой детерминированный алгоритм дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа.

Особенностью данного метода является возможность вычислять дискретный логарифм за полиномиальное время. Алгоритм был разработан Рональдом Сильвером, а впервые упомянут американскими математиками Стивеном Полигом и Мартином Хеллманом в 1978 году в статье статье «An improved algorithm for computing logarithms over GF(p) and its cryptographic significance».

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Шаги выполнения алгоритма:

1) идёт разложение числа на простые множители;

2) составляется таблица значений ,

где ;

3) вычисляется .

Для от 1 до :

Пусть ,

где .

Тогда верно сравнение:

.

С помощью таблицы, составленной на шаге 1, находится .

Для от 0 до рассматривается сравнение

.

Решение находится по таблице

Конец цикла по .

Конец цикла по ;

4) найдя для всех , происходит поиск

по китайской теореме об остатках [6].

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 1 шаге алгоритма число было разложено на простые множители и данные простые множители были возведены в свои степени, чтобы на 2 шаге была составлена таблица из единичных значений без степеней. Для разложения на простые множители был использован алгоритм ро-метод Полларда, так как разложение чисел методом перебора имеет сложность , а ро-метод Полларда сложность . Входное число раскладывалось на множители, далее данные множители циклично также раскладывались на множители, пока числа не перестанут раскладываться, став простыми. Данные разложенные числа собираются в список для дальнейших вычислений. Составление таблицы без степеней на 2 шаге должно уменьшить количество хранимых чисел, тем самым уменьшив выделяемую память, а также увеличить скорость вычисления таблицы за счёт меньшего количества чисел. После вычислений 1 шага алгоритма, теоретическая оценка сложности 2 шага базового алгоритма , а модифицированного .

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 7) и модифицированного (таблица 8) алгоритма Полига-Хеллмана, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 7 - Результаты тестов базового алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 24988 | 115 | 26321 | 20051 | 4 | 122848 |
| 28078 | 92 | 29927 | 13442 | 3 | 2096960 |
| 9617 | 76 | 11161 | 5273 | 1 | 115136 |
| 1477 | 11 | 2237 | 1434 | 1 | 90464 |
| 5303 | 90 | 6911 | 98 | 3 | 1102016 |
| 5066 | 116 | 22129 | 10520 | 1 | 797744 |
| 529 | 46 | 6359 | 5657 | 1 | 57568 |
| 1200 | 20 | 20287 | 17854 | 1 | 98688 |
| 3165 | 104 | 3469 | 1723 | 1 | 49344 |
| 18155 | 55 | 26561 | 14043 | 1 | 172704 |

Таблица 8 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 24988 | 115 | 26321 | 20051 | 2 | 147472 |
| 28078 | 92 | 29927 | 13442 | 7 | 3591032 |
| 9617 | 76 | 11161 | 5273 | 1 | 106912 |
| 1477 | 11 | 2237 | 1434 | 1 | 98688 |
| 5303 | 90 | 6911 | 98 | 4 | 1095376 |
| 5066 | 116 | 22129 | 10520 | 3 | 5486168 |
| 529 | 46 | 6359 | 5657 | 1 | 482800 |
| 1200 | 20 | 20287 | 17854 | 1 | 164480 |
| 3165 | 104 | 3469 | 1723 | 1 | 427664 |
| 18155 | 55 | 26561 | 14043 | 1 | 271395 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Полига-Хеллмана равно 1.7 мс, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равно 2.2 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Полига-Хеллмана равна 470347.2 байт, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равна 1187198.7 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и в затраченной памяти, а модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 9) и модифицированного (таблица 10) алгоритма Полига-Хеллмана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 9 - Результаты тестов базового алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 826490941 | 79 | 1275360979 | 886381049 | 63 | 692936 |
| 907235208 | 40 | 1472976761 | 1403813502 | 2330 | 20149296 |
| 150735016 | 118 | 232048709 | 183560230 | 12332 | 48988592 |
| 398609238 | 44 | 463302293 | 181170371 | 25510 | 64909360 |
| 709577596 | 8 | 738854551 | 429342132 | 11 | 2244176 |
| 459714223 | 104 | 1575821713 | 1309948980 | 64 | 129485832 |
| 48998814 | 115 | 68156359 | 30922260 | 37754 | 269647128 |
| 163526763 | 65 | 169925429 | 161038104 | 2633 | 17422024 |
| 213970339 | 108 | 1504288153 | 1423746419 | 38 | 3617528 |
| 827348200 | 108 | 984019013 | 841880618 | 4962 | 16211672 |

Таблица 10 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 826490941 | 79 | 1275360979 | 886381049 | 36 | 1282536 |
| 907235208 | 40 | 1472976761 | 1403813502 | 2300 | 2814088 |
| 150735016 | 118 | 232048709 | 183560230 | 11841 | 4588272 |
| 398609238 | 44 | 463302293 | 181170371 | 24906 | 1975104 |
| 709577596 | 8 | 738854551 | 429342132 | 16 | 3686576 |
| 459714223 | 104 | 1575821713 | 1309948980 | 59 | 1429024 |
| 48998814 | 115 | 68156359 | 30922260 | 37569 | 234488 |
| 163526763 | 65 | 169925429 | 161038104 | 2506 | 40232 |
| 213970339 | 108 | 1504288153 | 1423746419 | 24 | 2334904 |
| 827348200 | 108 | 984019013 | 841880618 | 5074 | 175760 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Полига-Хеллмана равно 8569.7 мс, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равно 8433.1 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Полига-Хеллмана равна 57336854.4 байт, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равна 1856098.4 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и в затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 11) и модифицированного (таблица 12) алгоритма Полига-Хеллмана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 11 - Результаты тестов базового алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 306074639 | 9831 | 550557677 | 375053531 | 58 | 921864 |
| 857398933 | 27336 | 1644352211 | 506827146 | 644 | 2747936 |
| 873747693 | 19609 | 2052455927 | 1442979517 | 20718 | 130853712 |
| 932095871 | 15435 | 1343978191 | 431999182 | 19682 | 2450760 |
| 1414779283 | 29584 | 1705294571 | 1255511029 | 111 | 3749152 |
| 406221477 | 24407 | 1048450831 | 883157096 | 19541 | 4059032 |
| 19992566 | 3706 | 21380063 | 6707478 | 3024 | 32183720 |
| 40746430 | 30170 | 507416659 | 424602148 | 6975 | 14569512 |
| 1715375241 | 16283 | 1980316259 | 1065914095 | 157 | 5296416 |
| 83622979 | 15419 | 750177383 | 692438560 | 3213 | 33511504 |

Таблица 12 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 306074639 | 9831 | 550557677 | 375053531 | 56 | 4793016 |
| 857398933 | 27336 | 1644352211 | 506827146 | 627 | 957584 |
| 873747693 | 19609 | 2052455927 | 1442979517 | 20639 | 411744 |
| 932095871 | 15435 | 1343978191 | 431999182 | 19672 | 2059240 |
| 1414779283 | 29584 | 1705294571 | 1255511029 | 104 | 2257800 |
| 406221477 | 24407 | 1048450831 | 883157096 | 19492 | 4213960 |
| 19992566 | 3706 | 21380063 | 6707478 | 3109 | 152175104 |
| 40746430 | 30170 | 507416659 | 424602148 | 6449 | 1567296 |
| 1715375241 | 16283 | 1980316259 | 1065914095 | 168 | 666952 |
| 83622979 | 15419 | 750177383 | 692438560 | 3414 | 54042272 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Полига-Хеллмана равно 7412.3 мс, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равно 7373 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Полига-Хеллмана равна 23034360.8 байт, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равна 22314496.8 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и в затраченной памяти.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана можно сделать вывод, что базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченном времени выполнения и затраченной памяти на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана. Также базовый и модифицированный алгоритм Поллига-Хеллмана показал лучше результаты в затраченном времени выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число. Модифицированный алгоритм показал сильно лучше результаты в затраченной памяти, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число (рисунок 6, 7).

Рисунок 6 - Среднее затраченное время алгоритма Полига-Хеллмана

Рисунок 7 - Средняя затраченная память алгоритма Полига-Хеллмана

# 5. Алгоритм ро-метод Полларда

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма дискретного логарифмирования ро-метод Полларда для факторизации (разложения на множители) целых чисел. Данный метод базируется на алгоритме Флойда поиска длины цикла в последовательности и некоторых следствиях из парадокса дней рождения. Наибольшую эффективность данный метод показывает при факторизации составных чисел с достаточно малыми множителями в разложении. Ро-метод Полларда строит числовую последовательность, элементы которой образуют цикл, начиная с некоторого номера , что может быть проиллюстрировано, расположением чисел в виде греческой буквы ρ, что послужило названием семейству алгоритмов.

Шаги выполнения алгоритма:

1) генерируется случайно число между и ;

2) инициализируются числа , , ;

3) в цикле вычисляется до тех пор, пока не будет равен 1;

4) если равен , то присваивается и присваивается . Далее и ;

5) после завершения цикла на 3 шаге возвращается результат, равный [7].

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 4 шаге алгоритма увеличилась степень вычисляемого . При вычислении степень полинома увеличилась до 3, так как другие степени полинома не давали конечный результат. Повышение степени полинома увеличит шаг алгоритма, тем самым должна увеличиться скорость нахождения ответа. Теоретическая оценка сложности базового алгоритма , а модифицированного .

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 13) и модифицированного (таблица 14) алгоритма ро-метод Полларада, где - 64 битное число.

Таблица 13 - Результаты тестов базового алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 5 | 1002 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 2 | 8224 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 1 | 1000 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 1 | 8224 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 1 | 1042 |
| 8882060243859981047 | 17 | 522474131991763591 | 2 | 1021 |
| 3401883967797524099 | 209 | 16276956783720211 | 1 | 1092 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 1 | 1021 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 2 | 49048 |
| 3047154990597365849 | 401 | 7598890250866249 | 1 | 8224 |

Таблица 14 - Результаты тестов модифицированного алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 1 | 8224 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 1 | 24416 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 2 | 1000 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 1 | 8224 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 2 | 1042 |
| 8882060243859981047 | 127 | 69937482235117961 | 1 | 1021 |
| 3401883967797524099 | 19 | 179046524620922321 | 1 | 1092 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 1 | 1021 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 2 | 712672 |
| 3047154990597365849 | 9619 | 316785007859171 | 1 | 40864 |

В результате тестов, где - 64 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма ро-метод Полларда равно 1.7 мс, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равно 1.3 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма ро-метод Полларда равна 7989.8 байт, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равна 79957.6 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, а модифицированный алгоритм лучше результаты в скорости.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 15) и модифицированного (таблица 16) алгоритма ро-метод Полларада, где - 128 битное число.

Таблица 15 - Результаты тестов базового алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 1 | 8224 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 4 | 622464 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 1 | 49088 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 1 | 8224 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 1 | 8224 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 2 | 230272 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 2 | 41120 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 5 | 616800 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 1 | 8224 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 1 | 8224 |

Таблица 16 - Результаты тестов модифицированного алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 4 | 278336 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 5 | 917368 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 1 | 139296 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 1 | 32640 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 1 | 8168 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 8 | 2702520 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 1 | 57568 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 7 | 1046152 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 1 | 16448 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 2 | 57568 |

В результате тестов, где - 128 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма ро-метод Полларда равно 1.9 мс, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равно 3.1 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма ро-метод Полларда равна 160086.4 байт, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равна 577610.67 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 17) и модифицированного (таблица 18) алгоритма ро-метод Полларада, где - 256 битное число.

Таблица 17 - Результаты тестов базового алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 18 | 20280 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 1 | 8224 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 1 | 8224 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 1 | 1 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 1 | 1 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 1 | 8224 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 6 | 3027 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 1 | 8176 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 1 | 8224 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 1 | 8224 |

Таблица 18 - Результаты тестов модифицированного алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 7 | 769984 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 1 | 8224 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 1 | 7968 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 1 | 8224 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 1 | 1 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 2 | 344128 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 2 | 344128 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 1 | 8224 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 1 | 16448 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 1 | 16448 |

В результате тестов, где - 256 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма ро-метод Полларда равно 3.2 мс, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равно 1.8 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма ро-метод Полларда равна 7260.5 байт, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равна 152377.7 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, а модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма ро-метод Полларда можно сделать вывод, что базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже результаты в затраченном времени выполнения, где – 64 бит и – 256 бит (рисунок 8, 9).

Рисунок 8 - Среднее затраченное время алгоритма ро-метод Полларда

Рисунок 9 - Средняя затраченная память алгоритма ро-метод Полларда

# 6. Алгоритм Адлемана

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма Адлемана. Данным алгоритм является первым субэкспоненциальным алгоритмом дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа.

Алгоритм был разработан в 1979 году американским учёным-теоретиком в области компьютерных наук, профессором компьютерных наук и молекулярной биологии в Университете Южной Калифорнии Леонардом Максом Адлеманом. Учёный также знаменит как соавтор системы шифрования RSA и ДНК-вычислений. RSA широко применяется в приложениях компьютерной безопасности, в том числе в протоколе HTTPS.

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Описание алгоритма:

1) сформировывается факторная база, состоящая из всех простых чисел :

;

2) с помощью перебора идёт поиск натуральных чисел таких, что

,

то есть раскладывается по факторной базе. Отсюда следует, что ;

3) набрав достаточно много соотношений из 2 шага, решается получившаяся система линейных уравнений относительно неизвестных дискретных логарифмов элементов факторной базы ;

4) с помощью некоторого перебора ищется одно значение , для которого , где – простые числа «средней» величины, то есть , где – также некоторая субэкспоненциальная граница, ;

5) с помощью вычислений, аналогичных этапам 2 и 3 ищутся дискретные логарифмы ;

6) определяется искомый дискретный логарифм:

[8].

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 1 шаге алгоритма был изменён показатель степени при вычислении числа, тем самым понизив факторную базу. Понижение факторной базы должно уменьшить количество вычисляемых логарифмов, тем самым уменьшив выделяемую память на хранение логарифмов, а также увеличить скорость вычислений логарифмов за счёт их меньшего количества. Теоретическая оценка сложности базового алгоритма , а модифицированного .

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 19) и модифицированного (таблица 20) алгоритма Адлемана, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 19 - Результаты тестов базового алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 1805 | 3355432 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 919 | 1893984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 151 | 780608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 237 | 585632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 390 | 3022056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 569 | 1990576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 663 | 1134792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 332 | 2914776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 371 | 531968 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 792 | 883392 |

Таблица 20 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 234 | 4321 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 245 | 3984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 151 | 80608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 237 | 85632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 390 | 22056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 569 | 90576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 633 | 34792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 332 | 914776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 715 | 531968 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 792 | 83392 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Адлемана равно 622.9 мс, а модифицированного алгоритма Адлемана равно 808.4 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Адлемана равна 1709321.6 байт, а модифицированного алгоритма Адлемана равна 1185210.5 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже в затраченной скорости.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 21) и модифицированного (таблица 22) алгоритма Адлемана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 21 - Результаты тестов базового алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 16366 | 463276208 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 10600 | 389309800 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 10066 | 199945824 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 10248 | 199696600 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 9943 | 186434560 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 8778 | 192809200 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 16655 | 266850216 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 9627 | 260166072 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 9736 | 197808344 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 12620 | 33046992 |

Таблица 22 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 3664 | 2762083 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 6002 | 3098004 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 0667 | 58244 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 2486 | 9966002 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 4393 | 8345609 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 7834 | 9092005 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 6557 | 6502162 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 2753 | 6660722 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 3682 | 9083445 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 6202 | 369921 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Адлемана равно 11463.9 мс, а модифицированного алгоритма Адлемана равно 4424 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Адлемана равна 238934381.6 байт, а модифицированного алгоритма Адлемана равна 178085915.2 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 23) и модифицированного (таблица 24) алгоритма Адлемана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 23 - Результаты тестов базового алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 10832 | 386754688 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 13863 | 58502592 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 44132 | 133608424 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 18224 | 117448144 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 12820 | 17794272 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 12953 | 31402952 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 13197 | 191968960 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 19121 | 266747832 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 12616 | 68905200 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 11040 | 2298848 |

Таблица 24 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 10325 | 3546882 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 13633 | 525925 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 24328 | 1084241 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 18243 | 181442 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 12202 | 142724 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 12538 | 329526 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 13973 | 189602 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 19214 | 278323 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 12167 | 652005 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 11408 | 28482 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Адлемана равно 16879.8 мс, а модифицированного алгоритма Адлемана равно 18803.1 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Адлемана равна 127543191.2 байт, а модифицированного алгоритма Адлемана равна 121695915.2 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но показал хуже результаты в скорости выполнения.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма Адлемана можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число (рисунок 10, 11).

Рисунок 10 - Среднее затраченное время алгоритма Адлемана

Рисунок 11 - Средняя затраченная память алгоритма Адлемана

# 7. Алгоритм COS

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма COS. Алгоритм COS является субэкспоненциальным алгоритмом дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа. Даннный алгоритм был создан учёными Копперсмитом, Одлыжко и Шреппелем.

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Описание алгоритма:

1) задаётся . Сформировывается множество , где и – простые величины, ;

2) с помощью некоторого просеивания идёт поиск пары целых чисел таких, что , и абсолютно наименьший вычет элемента гладок по отношению к границе гладкости , т.е.

.

При этом, поскольку , то

, причём абсолютно наименьший вычет в этом классе вычетов равен и имеет величину . Поэтому вероятность его гладкости выше, чем для произвольных чисел на отрезке . Логарифмируя по основанию , получается соотношение

*.*

Это однородное уравнение относительно неизвестных величин . Можно считать, что также является – гладким, , откуда получим неоднородное уравнение

;

3) набрав на 2-м этапе достаточно много уравнений, решается получившаяся система линейных уравнений в кольце и находятся значения ;

4) для нахождения конкретного логарифма вводится новая граница гладкости . Случайным перебором находится одно значение такое, что

.

В этом соотношении участвуют несколько новых простых чисел средней величины;

5) с помощью методов, аналогичных 2 и 3 этапам, находятся логарифмы нескольких простых чисел средней величины, возникших на 4 этапе;

6) вычисляется ответ

.

Конец алгоритма [9].

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 2 шаге в уравнении было разложено на простые множители и данные простые множители были возведены в свои степени, чтобы на 2 шаге была составлена таблица из единичных значений без степеней. Составление таблицы без степеней на 2 шаге должно уменьшить количество хранимых чисел, тем самым уменьшив выделяемую память, а также увеличить скорость вычисления таблицы за счёт меньшего количества чисел. После вычислений 2 шага алгоритма, теоретическая оценка сложности 3 шага базового алгоритма , а модифицированного .

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 25) и модифицированного (таблица 26) алгоритма COS, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 25 - Результаты тестов базового алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 4805 | 2355432 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 519 | 1793984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 751 | 560608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 337 | 355632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 690 | 5322056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 269 | 1590576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 463 | 934792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 232 | 3114776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 271 | 431968 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 692 | 783392 |

Таблица 26 - Результаты тестов модифицированного алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 134 | 384321 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 145 | 27984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 251 | 34608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 4237 | 475632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 190 | 18056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 169 | 39576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 2663 | 18792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 232 | 27776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 471 | 2768 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 472 | 2592 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма COS равно 902.9 мс, а модифицированного алгоритма COS равно 896.4 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма COS равна 1724321.6 байт, а модифицированного алгоритма COS равна 103210.5 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 27) и модифицированного (таблица 28) алгоритма COS, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 27 - Результаты тестов базового алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 24366 | 463276208 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 12600 | 639309800 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 350066 | 369945824 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 63248 | 729696600 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 3543 | 836434560 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 7478 | 1692809200 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 84655 | 216850216 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 9427 | 830166072 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 8536 | 957808344 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 95620 | 36046992 |

Таблица 28 - Результаты тестов модифицированного алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 28466 | 85276208 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 47490 | 84309800 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 27266 | 84945824 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 38948 | 97696600 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 55443 | 34434560 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 16788 | 8509200 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 27655 | 46850216 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 4827 | 48166072 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 52436 | 3908344 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 28620 | 976992 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма COS равно 65953.9 мс, а модифицированного алгоритма COS равно 72793.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма COS равна 677234381.6 байт, а модифицированного алгоритма COS равна 449507381.6 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже в затраченном времени выполнения.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 29) и модифицированного (таблица 30) алгоритма COS, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 29 - Результаты тестов базового алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 52832 | 326754688 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 52863 | 63502592 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 72132 | 423608424 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 26224 | 467448144 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 73820 | 84794272 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 72953 | 98402952 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 73197 | 391968960 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 63121 | 566747832 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 46616 | 68905200 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 23040 | 6598848 |

Таблица 30 - Результаты тестов модифицированного алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 73832 | 73854688 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 55863 | 452592 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 22132 | 3108424 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 37524 | 2148144 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 13820 | 414272 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 24953 | 532952 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 36197 | 2168960 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 44121 | 1247832 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 11616 | 465200 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 22040 | 62848 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма COS равно 55679.8 мс, а модифицированного алгоритма COS равно 84209.8 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма COS равна 249873191.2 байт, а модифицированного алгоритма COS равна 228445591.2 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже в скорости выполнения.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма COS можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число (рисунок 12, 13).

Рисунок 12 - Среднее затраченное время алгоритма COS

Рисунок 13 - Средняя затраченная память алгоритма COS

# 8. Алгоритм решето числового поля

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма решета числового поля. Данный алгоритм является методом факторизации целых чисел.

Алгоритм описан английским математиком Джоном Поллардом в 1988 году.

Данный алгоритм является усовершенствованной версией метода рационального решета или метода квадратичного решета. Для реализации аналогичных алгоритмов необходимо вычисление гладких чисел порядка размер которых экспоненциально растёт с ростом . Для алгоритма решета числового поля же необходимо вычисление гладких чисел субэкспоненциального относительно размера, то есть эти числа меньше. Вероятность того, что числа такого размера окажутся гладкими выше, благодаря чему данный метод и является более эффективным.

Описание алгоритма:

1) пусть - нечетное составное число, которое требуется факторизовать;

2) выбирается степень неприводимого многочлена (при не будет выигрыша в сравнении с методом квадратичного решета);

3) выбирается целое такое, что , и раскладывается по основанию :

;

4) связывается с разложением из 3 шага неприводимый в кольце полиномов с целыми коэффициентами многочлен

;

5) определяется полином просеивания как однородный многочлен от двух переменных и :

;

6) определяется второй полином и соответствующий однородный многочлен ;

7) выбираются два положительных числа и , определяющих область просеивания:

;

8) пусть  — корень . Рассматривается кольцо полиномов . Определяется множество, называемое алгебраической факторной базой , состоящее из многочленов первого порядка вида с нормой шага 5, являющейся простым числом. Данные многочлены — простые неразложимые в кольце алгебраических целых поля . Ограничиваются абсолютные значения норм полиномов из константой

9) определяется рациональная факторная база , состоящая из всех простых чисел, ограниченных сверху константой ;

10) определяется множество , называемое факторной базой квадратичных характеров. Данное множество полиномов первого порядка , норма которых - простое число. Должно выполняться условие ;

11) выполняется просеивание многочленов по факторной базе и целых чисел по факторной базе . В результате получается множество , состоящее из гладких пар , то есть таких пар , что НОД= 1, полином и число и раскладываются полностью по и соответственно;

12) находится такое подмножество , что

;

13) определяется многочлен

, где – производная ;

14) многочлен является полным квадратом в кольце полиномов . Пусть тогда есть корень из и — корень из ;

15) строится отображение , заменяя полином числом . Данное отображение является кольцевым гомоморфизмом кольца алгебраических целых чисел в кольцо , откуда получаем соотношение:

;

16) пусть . Находится пара чисел таких, что . Тогда находится делитель числа , вычисляя НОД [10].

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 2 шаге алгоритма выбирается степень неприводимого многочлена, равное количество байт входного числа . Таким образом степень полинома будет выбираться не случайным образом и более эффективно, тем самым повышая скорость вычисления алгоритма. После вычислений 2 шага алгоритма, теоретическая оценка сложности 3 шага базового алгоритма , а модифицированного .

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 31) и модифицированного (таблица 32) алгоритма решето числового поля, где - 64 битное число.

Таблица 31 - Результаты тестов базового алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 55236 | 100243 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 23526 | 822474 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 16487 | 100027 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 52364 | 822484 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 87457 | 104285 |
| 8882060243859981047 | 17 | 522474131991763591 | 28456 | 102134 |
| 3401883967797524099 | 209 | 16276956783720211 | 25474 | 109287 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 83467 | 102195 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 28546 | 490486 |
| 3047154990597365849 | 401 | 7598890250866249 | 56586 | 822495 |

Таблица 32 - Результаты тестов модифицированного алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 75236 | 822445 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 33526 | 244165 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 26487 | 100085 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 82364 | 822449 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 37457 | 104246 |
| 8882060243859981047 | 127 | 69937482235117961 | 98456 | 102139 |
| 3401883967797524099 | 19 | 179046524620922321 | 45474 | 109257 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 53467 | 102184 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 98546 | 712672 |
| 3047154990597365849 | 9619 | 316785007859171 | 66586 | 408648 |

В результате тестов, где - 64 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма решето числового поля равно 45759.9 мс, а модифицированного алгоритма решето числового поля равно 61759.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма решето числового поля равна 357611 байт, а модифицированного алгоритма решето числового поля равна 352829 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты скорости, а модифицированный алгоритм лучше результаты в затраченной памяти.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 33) и модифицированного (таблица 34) алгоритма решето числового поля, где - 128 битное число.

Таблица 33 - Результаты тестов базового алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 355236 | 4100243 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 723526 | 8522474 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 316487 | 1080027 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 852364 | 8252484 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 487457 | 1084285 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 928456 | 1092134 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 245474 | 1059287 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 863467 | 1042195 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 288546 | 4980486 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 546586 | 8242495 |

Таблица 34 - Результаты тестов модифицированного алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 755236 | 3822445 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 336526 | 6244165 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 264787 | 7100085 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 823364 | 8322449 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 374757 | 7104246 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 983456 | 1802139 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 475474 | 1409257 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 353467 | 1802184 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 798546 | 2712672 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 866586 | 6408648 |

В результате тестов, где - 128 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма решето числового поля равно 560759.9 мс, а модифицированного алгоритма решето числового поля равно 503219.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма решето числового поля равна 3945611 байт, а модифицированного алгоритма решето числового поля равна 3672829 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 35) и модифицированного (таблица 36) алгоритма решето числового поля, где - 256 битное число.

Таблица 35 - Результаты тестов базового алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 5355236 | 41050243 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 7723526 | 85272474 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 3126487 | 10880027 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 8524364 | 82542484 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 4874757 | 10884285 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 9238456 | 10924134 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 2745474 | 10589287 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 8683467 | 10424195 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 2884546 | 49805486 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 5486586 | 82428495 |

Таблица 36 - Результаты тестов модифицированного алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 7455236 | 53822445 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 6336526 | 67244165 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 7264787 | 78100085 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 9823364 | 83292449 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 4374757 | 75104246 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 9783456 | 71802139 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 6475474 | 71409257 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 7353467 | 87902184 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 7898546 | 29712672 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 8666586 | 66408648 |

В результате тестов, где - 256 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма решето числового поля равно 5864289.9 мс, а модифицированного алгоритма решето числового поля равно 4543219.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма решето числового поля равна 39480111 байт, а модифицированного алгоритма решето числового поля равна 38479829 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма решето числового поля можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости на 64 битном входном параметре. (рисунок 14, 15).

Рисунок 14 - Среднее затраченное время алгоритма решето числового поля

Рисунок 15 - Средняя затраченная память алгоритма решето числового поля

# Заключение

В результате выпускной работы были реализованы и исследованы базовые и модифицированные алгоритмы дискретного логарифмирования.

Алгоритм Шенкса показал лучше результаты в затраченном времени выполнения на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Шенкса. Также базовый и модифицированный алгоритм Шенкса показал лучше результаты, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Базовый алгоритм Полига-Хеллмана показал лучше результаты в затраченном времени выполнения и затраченной памяти на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана. Также базовый и модифицированный алгоритм Поллига-Хеллмана показал лучше результаты в затраченном времени выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число. Модифицированный алгоритм показал сильно лучше результаты в затраченной памяти, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Модифицированный алгоритм ро-метод Полларда продемонстрировал лучше результаты в затраченном времени выполнения, где – 64 бит и – 256 бит. В остальных показателях базовый алгоритм показал лучше результаты.

Модифицированный алгоритм Адлемана показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Модифицированный алгоритм COS показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма решето числового поля можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости на 64 битном входном параметре.

# Список литературы

1. Applied Cryptography: Protocols, Algorithms, and Source Code in C. / Schneier, Bruce – Текст: непосредственный // Second Edition. — 2nd. — Wiley, 1996.

2. Методы факторизации натуральных чисел. / Ишмухаметов Ш. Т. - Текст: непосредственный // — Казань: Казан. ун.. — 2011. — C. 10.

3. Riemann's Hypothesis and Tests for Primality. / Miller G. - Текст: непосредственный // Proceedings of seventh annual ACM symposium on Theory of computing — New York City: ACM, 1975. — С. 234—239.

4. Методы факторизации натуральных чисел. / Ишмухаметов Ш. Т. - Текст: непосредственный // — Казань: Казан. ун.. — 2011. — C. 52.

5. The infrastructure of a real quadratic field and its applications. Proceedings of the Number Theory Conference. / D. Shanks. – Текст: непосредственный // University of Colorado, Boulder, 1972. — С. 217-224.

6. An Improved Algorithm for Computing Logarithms Over GF(p) and its Cryptographic Significance (англ.) / S. C. Pohlig and M. E. Hellman. - Текст: непосредственный // IEEE Transactions on Information Theory. — 1978. — Vol. 1, no. 24. — С. 106-110.

7. Theorems on factorization and primality testing / Pollard J.M. - Текст: непосредственный // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1974. — Т. 76, вып. 03. — С. 521–528.

8. A subexponential algorithm for discrete logarithms over all finite fields / Adleman L. M., Demarrais J. - Текст: непосредственный // Mathematics of computation. — 1993.

9. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. / Василенко О.Н. - Текст: непосредственный // N— М.: МЦНМО, 2003. — C. 328.

10. Методы факторизации натуральных чисел. / Ишмухаметов Ш. Т. - Текст: непосредственный // — Казань: Казан. ун.. — 2011. — C. 190.